Mauricio Pérez
Florencia Fusi

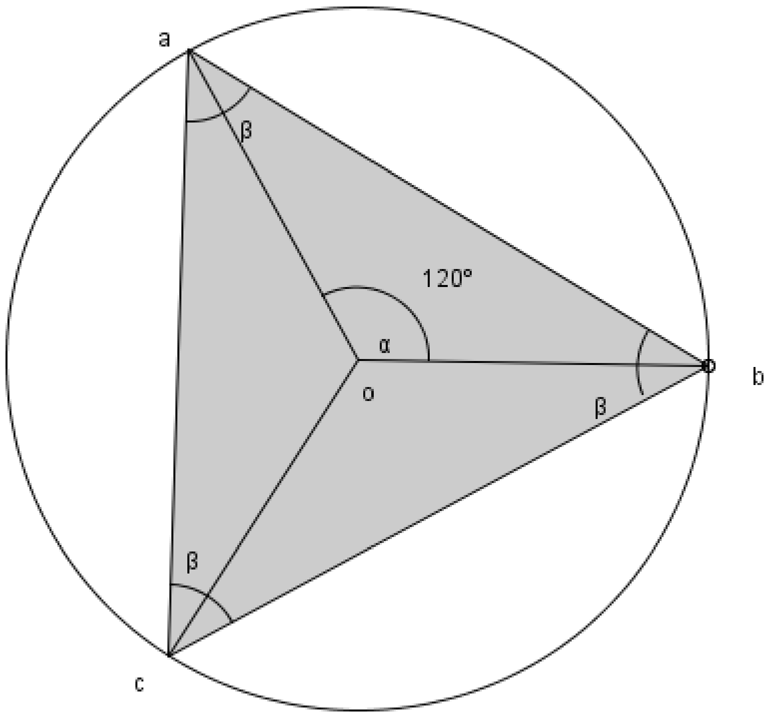
Suma de los ángulos interiores de un polígono regular

Demostraciones 1:

Teniendo en cuenta un polígono regular inscripto en una circunferencia, y los ángulos:

α = ángulo central
β = ángulo interior
n = número de lados de un polígono

- **Polígono regular de tres lados**



$$n = 3$$

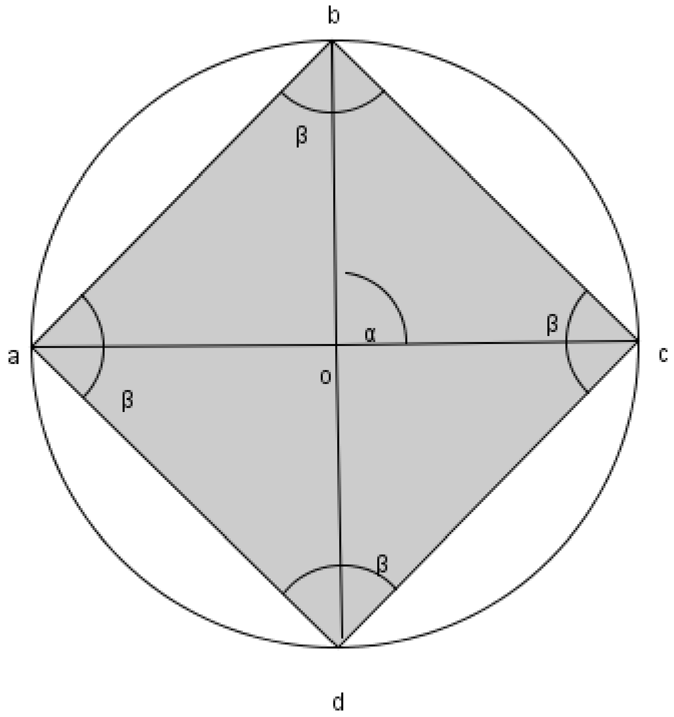
$$\propto = \frac{360°}{3} \rightarrow \propto = 120°$$

$$en \ldots aob \rightarrow \frac{1}{2}\beta + \frac{1}{2}\beta + \alpha = 180°$$

$$\beta + \alpha = 180°$$
$$\beta + 120° = 180°$$
$$\beta = 180° - 120°$$
$$\beta = 60°$$

$\sum \beta = n.\beta = 3.\beta = 180°$ Suma total de los ángulos interiores de un triángulo

- **Polígono regular de cuatro lados**



$n = 4$

$\alpha = \dfrac{360°}{4} \rightarrow \alpha = 90°$

$en \ldots boc \rightarrow \alpha + \dfrac{1}{2}\beta + \dfrac{1}{2}\beta = 180°$

$$\begin{aligned} \alpha + \beta &= 180° \\ 90° + \beta &= 180° \\ \beta &= 180° - 90° \\ \beta &= 90° \end{aligned}$$

$\sum \beta = n.\beta = 4.90° = 360°$ Suma total de los ángulos interiores de un cuadrado

- **Para cualquier polígono regular de n lados:**

Siendo $n = n$ y $\alpha = \dfrac{360°}{n}$ y $\beta = 180° - \alpha$

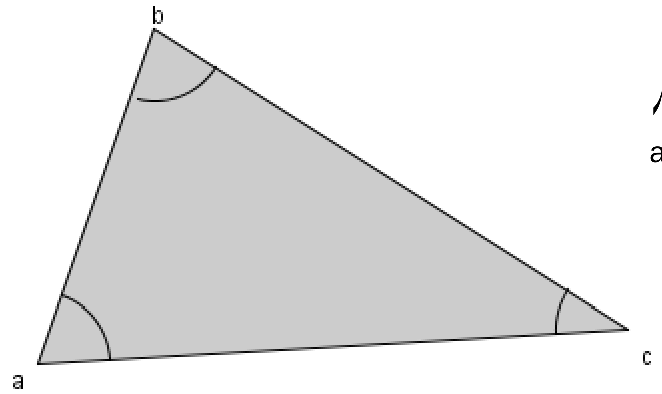
Podemos realizar: $\beta = 180° - (\dfrac{360°}{n}) \Rightarrow \beta = 180°.(1 - \dfrac{2}{n}) \Rightarrow \beta = 180°.(\dfrac{n-2}{n})$

$$\sum \beta = n.\beta = n.[180°.(\frac{n-2}{n})] = 180°.(n-2)$$

$$\boxed{\sum \beta = 180°.(n-2) \qquad n \geq 3}$$

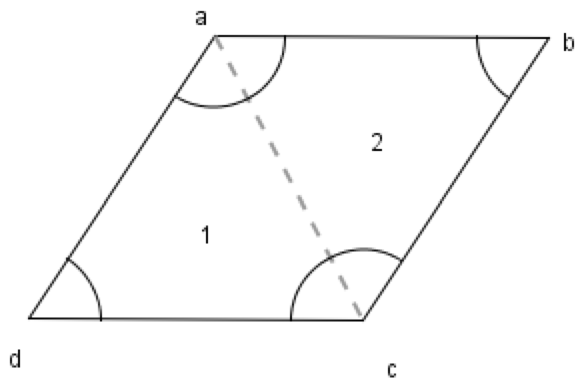
Suma de los ángulos interiores de un polígono cualquiera

- Para el polígono de tres lados (triángulo):



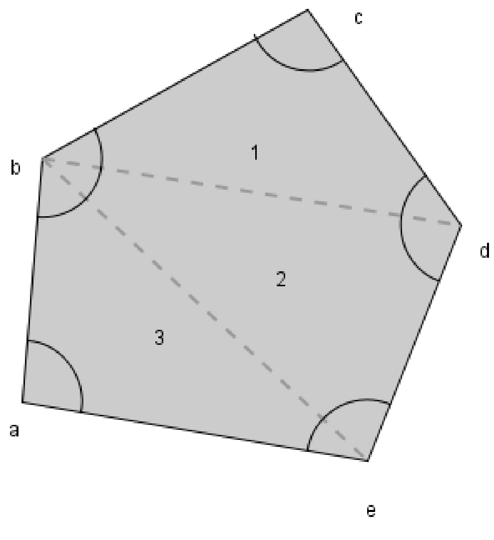
$\hat{a} + \hat{b} + \hat{c} = 180º$

- Para el polígono, de 4 lados (cuadrilátero):



Basándonos en la propiedad de la suma de los ángulos interiores de un triángulo, se observa que trazando una diagonal del cuadrilátero, éste queda dividido en dos triángulos. En conclusión, la suma de los ángulos interiores de un cuadrilátero debe ser:

S = 2 . 180º
S = 360º

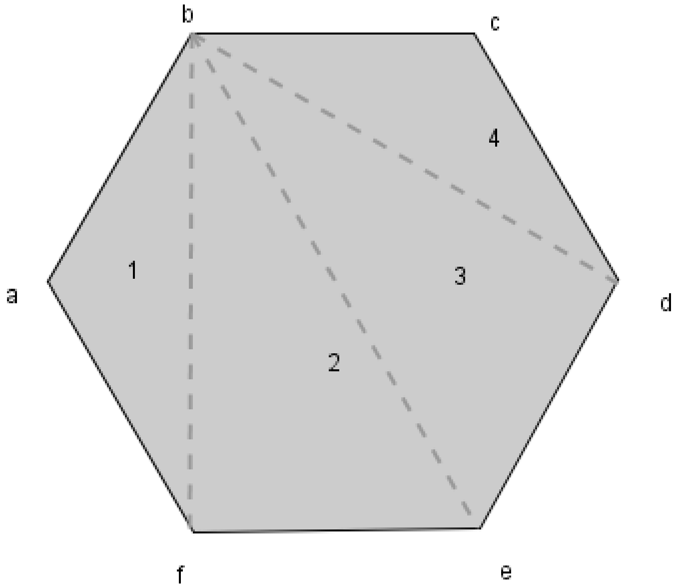


- Partiendo de esta idea, observamos que sucede con el siguiente polígono, de 5 lados (pentágono):

Trazamos dos diagonales que parten del mismo vértice y construimos tres triángulos. Por lo tanto:

S = 3 . 180º
S = 540º

- Para el hexágono, polígono de seis lados:



Partiendo del mismo vértice, trazo tres diagonales, y quedan determinados 4 triángulos.
Entonces:

S = 4 . 180º
S = 720º

Por lo tanto, podemos deducir, que existe una relación entre la cantidad de triángulos dentro de un polígono y la cantidad de lados del mismo.

Cuando tiene **3 lados hay 1 triángulo**
4 lados hay 2 triángulos
5 lados hay 3 triángulos
6 lados hay 4 triángulos
7 lados hay 5 triángulos
8 lados hay 6 triángulos
… …

Además debemos destacar que, la cantidad de triángulos que se forman dentro de un polígono es uno más que la cantidad de diagonales que trazo partiendo de un vértice.
También, se destaca que en todo polígono hay dos vértices que no se utilizan para el trazado de diagonales desde un único vértice.

Conclusión:

La fórmula para calcular la suma de los ángulos interiores de cualquier polígono es igual a:

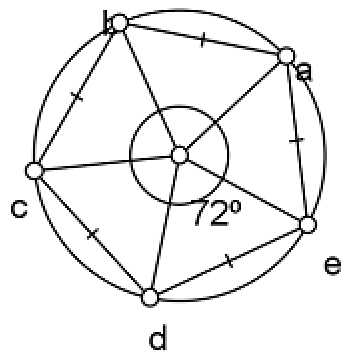
S = (n – 2) . 180º

Demostraciones 2:

Suma de los ángulos interiores de un polígono regular

- Dado un pentágono regular:

Trazamos las 5 líneas que unen el centro de la figura con cada vértice de la misma.
Así hemos dividido al pentágono en 5 triángulos iguales.



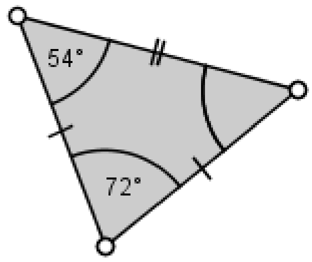
1) $\overset{\Delta}{aob}$
2) $\overset{\Delta}{boc}$
3) $\overset{\Delta}{cod}$
4) $\overset{\Delta}{doe}$
5) $\overset{\Delta}{eof}$

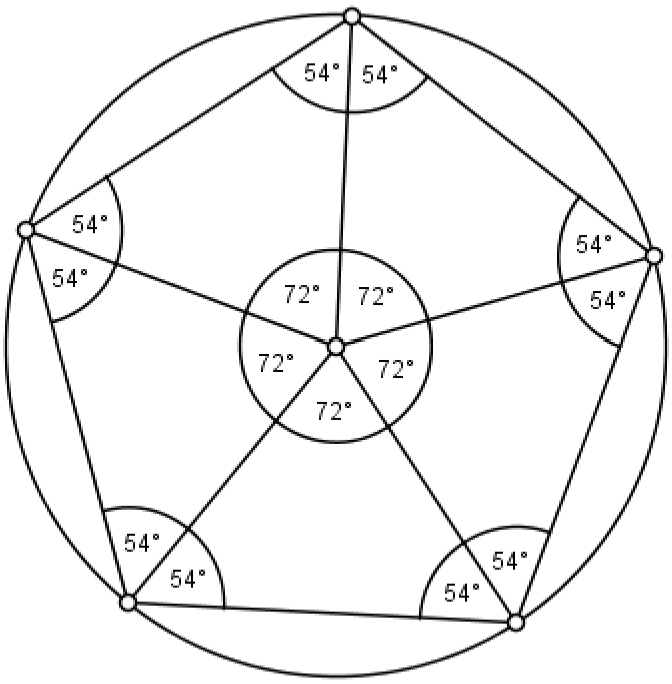
Como el ángulo alrededor de un punto, en este caso el centro, es igual a 360º, podemos decir que los ángulos 1, 2, 3, 4, 5 miden exactamente 72º.

360º : 5 triángulos= 72º c/u

Sabemos que la suma de los ángulos interiores de un triangulo es igual a 180º. (Caja de herramientas)

Como ya sabemos que uno de los ángulos es igual a 72º podemos deducir que los otros dos suman 108º (**180º- 72º = 108º**)





También sabemos que el triangulo es isósceles. Entonces podemos afirmar que los dos ángulos de la base son iguales. **108º : 2 = 54º**

Cada ángulo del pentágono será de 108º.

<u>Conclusión</u>:
La suma de los ángulos interiores = **108º .5 vértices = 540º**

Para obtener una formula general:

- Polígono de n lados
- Se pueden forma n triángulos
- Alrededor del centro del polígono se forman n ángulos iguales, de los cuales cada uno mide 360º/n
- Cada ángulo interno mide 180º - 360º/n

$$\int = (180^{\circ} - 360^{\circ}/n).n$$

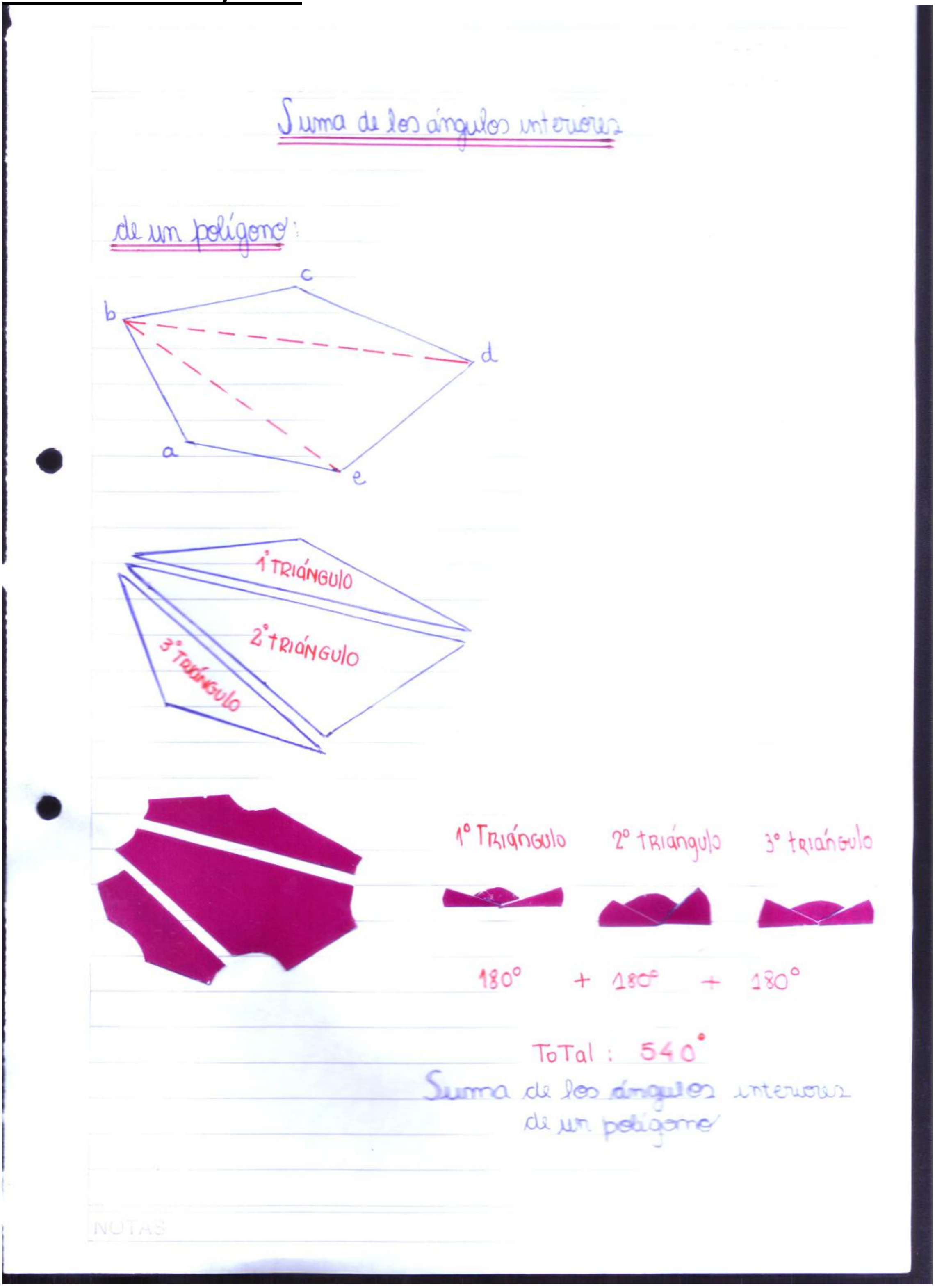
$$\int = (\frac{180^{\circ}.n.360^{\circ}}{\cancel{n}}).\cancel{n}$$

$$\int = 180^{\circ}\, n - 360$$

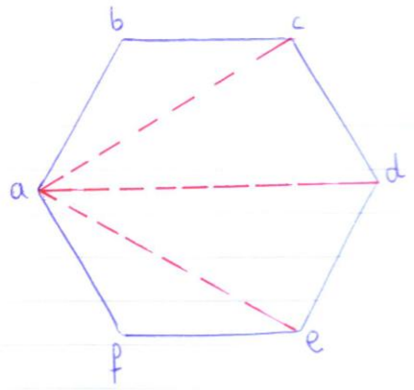
$$\int = 180^{\circ}\,(n-2)$$

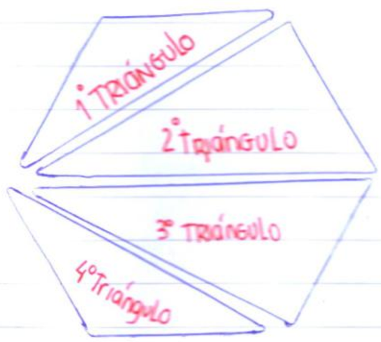
Formula general

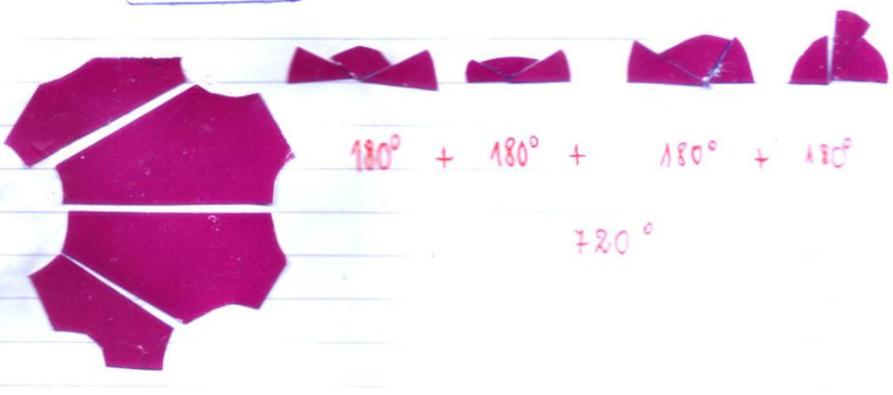
Demostración empírica:



de um polígono regular:







$180^\circ + 180^\circ + 180^\circ + 180^\circ$

720°

NOTA

Caja de herramientas: